物　　　理

(注)　医学科の受験生は問 1 から問 8 までを，歯学科および保健衛生学科(検査技術学専攻)の受験生は問 1 から問 6 までを解答せよ。

1　大きさが無視できる人工衛星を地球の地表面近くで水平方向に速さ v_0 で打ち出すと，地表すれすれで地球の半径 R の円軌道を描いて周回する。この速度 v_0 を第一宇宙速度という。また第二宇宙速度 v' を超えると，人工衛星は地球から無限遠方まで飛び去ることができる。地表での重力加速度の大きさを g として，以下の問題に答えよ。ここで，地球を真球とし，地表の構造物や空気抵抗，地球の自転と公転の影響は無視できるとする。また，地球と人工衛星の間に働く万有引力のみを考え，万有引力による位置エネルギーの基準(位置エネルギー 0)は無限遠とする。

問 1　第一宇宙速度 v_0 およびその周期 T_0 を，R, g を用いて表せ。

問 2　第二宇宙速度 v' を，R, g を用いて表せ。

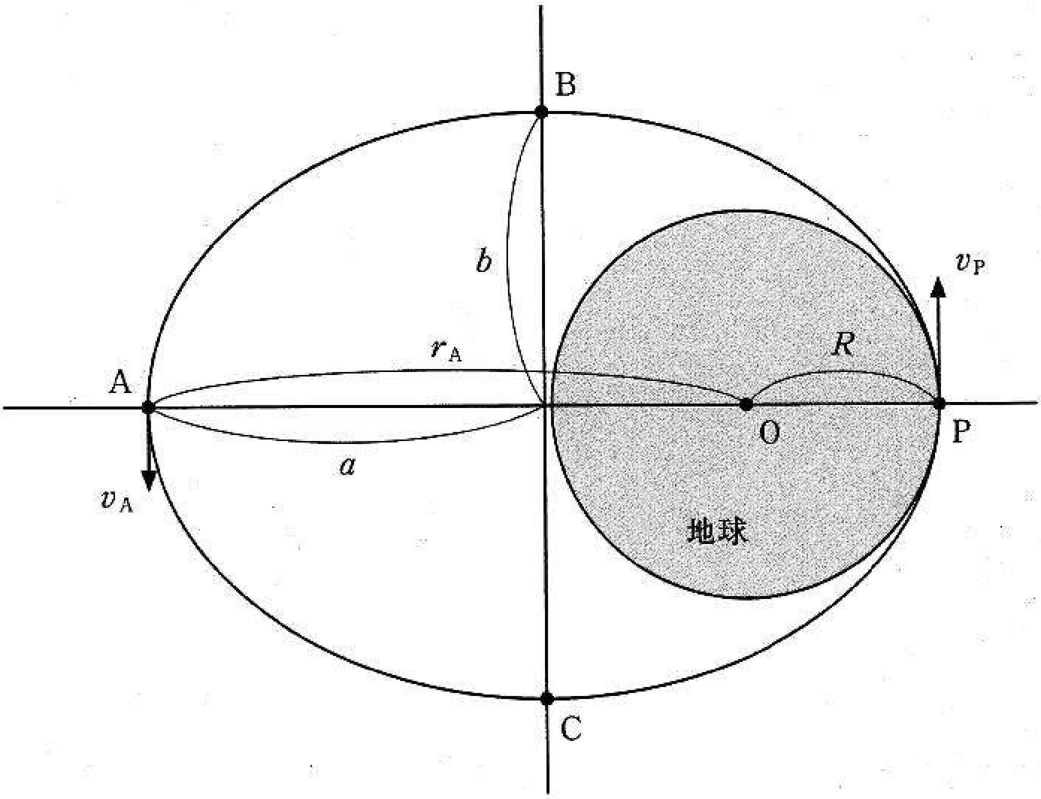

図1

質量 $m + \Delta m$ の人工衛星が地表すれすれで反時計回りに半径 R の円軌道を周回している。この人工衛星が図1の点Pに来た時，人工衛星から質量 Δm の物体を後方に放出した。放出直後，人工衛星の速度は v_P となり，質量 Δm の物体の速度はゼロとなった。その後，人工衛星は，図1の長軸半径 a，短軸半径 b の楕円軌道を周回した。この楕円軌道の焦点の一つは地球の中心Oに一致している。点Aは楕円軌道上でOから最も遠い点であり，線分 $\overline{OA} = r_A$，点Aを通過するときの人工衛星の速さを v_A とすると，ケプラーの第2法則(面積速度一定の法則)から

$$Rv_P = r_A v_A$$

が成り立つ。

問 3　v_{P} を m, Δm, v_0 を用いて表せ。

問 4　人工衛星が質量 Δm の物体を放出するときに使われたエネルギー ΔE を, m, Δm, v_0 を用いて表せ。

問 5　人工衛星が図 1 の楕円軌道上を周回するとき,

$$v_{\mathrm{P}} = \sqrt{2gR} \times \boxed{\quad (1) \quad}$$

$$v_{\mathrm{A}} = \sqrt{2gR} \times \boxed{\quad (2) \quad}$$

と書くことができる。空欄(1), (2)のそれぞれに入る式を, R, r_{A} を用いて表せ。

問 6　楕円軌道の周期を T とするとき, $\dfrac{T}{T_0}$ を, R, r_{A} を用いて表せ。

問 7　人工衛星の力学的エネルギーを, R, g, m, r_{A} を用いて表せ。

問 8　ケプラーの第 2 法則からわかるように, 楕円軌道では点 P に近いほど人工衛星が速く運動し, 点 A に近いほど遅く運動する。図 1 のように, 楕円の短軸と楕円軌道の交差する点を点 B, 点 C とすると, 人工衛星が点 B から点 C に達するまでの時間 T_1 と点 C から点 B に達するまでの時間 T_2 は異なる。

$$T_1 = 2T_2$$

となる楕円軌道の短軸半径 b を, a を用いて表せ。ただし楕円の性質から, 線分 $\overline{\mathrm{OB}} = \overline{\mathrm{OC}} = a$ である。また必要であれば, 図 1 の楕円の面積は πab と表されることを用いよ。

(注)　**医学科の受験生は問1から問2(6)までを，歯学科および保健衛生学科(検査技術学専攻)の受験生は問1から問2(4)までを解答せよ。**

2

問1　図1のように，電場と磁場中を運動する質量 m，電荷 $q(>0)$ の荷電粒子を考える。荷電粒子は真空中を運動し，その大きさと重力の影響は無視できるとする。紙面(xy 平面)に垂直で裏から表に向かう磁束密度の大きさが一定で B_0 の一様な磁場がかかった領域Ⅰ($y>0$)と，$+y$ 方向に向いた強さが一定で E の一様な電場がかかった領域Ⅱ($y<0$)がある。座標$(0,\ -d)$の点 Q_1 に静止していた荷電粒子を静かに放すと，y 軸上を加速しながら進み，原点Oから領域Ⅰに入射した。以下の問題に答えよ。

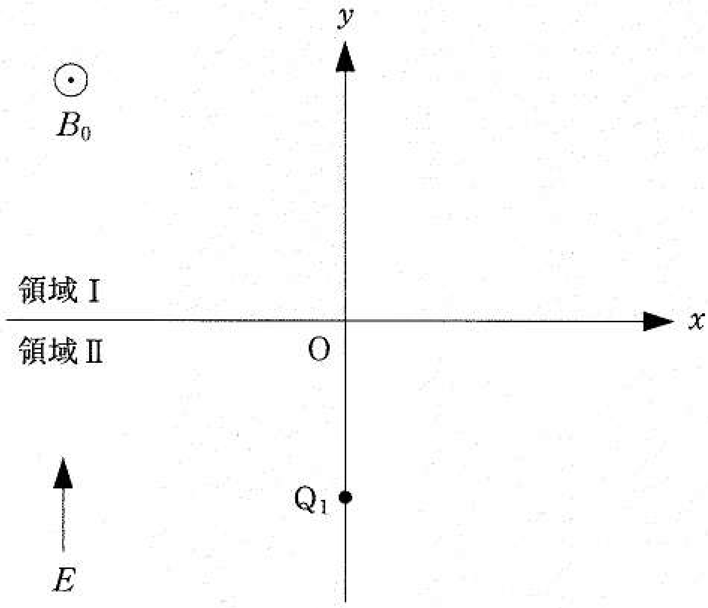

図1

(1)　荷電粒子が原点Oに到達した時の速さを $E,\ d,\ m,\ q$ のうち必要なものを用いて表せ。

(2)　その後，領域Ⅰ内で円運動し点 Q_2 より再び領域Ⅱに入射した。点 Q_2 の座標を $B_0,\ E,\ d,\ m,\ q$ のうち必要なものを用いて表せ。

(3) 荷電粒子が点 Q_1 から点 Q_2 に到達するまでにかかる時間を，B_0, E, d, m, q のうち必要なものを用いて表せ。

(4) 荷電粒子が点 Q_1 から点 Q_2 に到達するまでに電場と磁場が荷電粒子にする仕事の合計を，B_0, E, d, m, q のうち必要なものを用いて表せ。

(5) α 粒子(α 線の粒子)と β 粒子(β 線の粒子)を考える。まず α 粒子を原点Oより $+y$ 方向に速さ v_α で領域Iへ入射したところ，領域Iで半径 r_α の円運動となった。次に β 粒子を原点Oより $+y$ 方向に速さ v_β で領域Iへ入射したところ，領域Iで半径 r_β の円運動となった。α 粒子の質量 m_α と β 粒子の質量 m_β の比 m_α/m_β を，B_0, e, r_α, r_β, v_α, v_β のうち必要なものを用いて表せ。なお，電気素量を e とし，α 粒子と β 粒子の大きさは無視できるとする。

次に図2のように，質量 m，電荷 $q(>0)$ の荷電粒子が，原点Oより x 軸の負の向きから角度 $\theta(0<\theta<\frac{\pi}{2})$ の方向に速さ v_0 で領域Iへ入射した。その後，領域I内で円運動し点 Q_3 より再び領域IIに入射した。

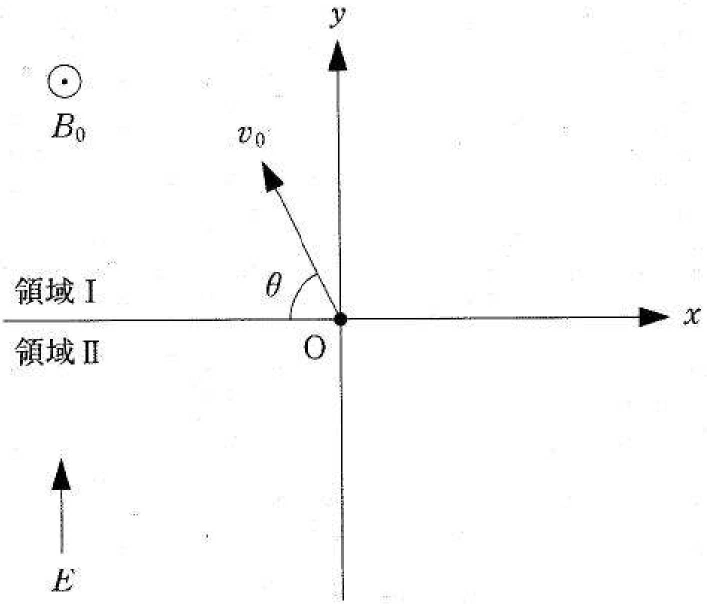

図2

(6) 原点Oから点Q_3までの荷電粒子の軌跡を図示せよ。また，円運動の中心と点Q_3の座標を，B_0，m，q，v_0，θのうち必要なものを用いて表せ。

(7) 荷電粒子が原点Oから点Q_3に到達にするまでの時間を，B_0，m，q，v_0，θのうち必要なものを用いて表せ。

問 2 図 3 のように，電場と磁場中を運動する質量 m，電荷 $q(>0)$ の荷電粒子を考える。荷電粒子は真空中を運動し，その大きさと重力の影響は無視できるとする。紙面(xy 平面)に垂直な方向に磁束密度の大きさが一定で $B = B_0$ の一様な磁場がかかった領域 1($y > d$)，領域 2($y < 0$)と，y 軸に平行で強さが E で一定の一様な電場がかかっている領域 3($0 < y < d$)がある。原点 O で静止していた荷電粒子を静かに放すと，領域 3 の $+y$ 方向に向いた電場によって加速され，点 P_1 から領域 1 に入射した。荷電粒子は領域 1 で円運動した後，点 P_1' より領域 3 に入射し，強さが E のまま向きが逆転した一様な電場により $-y$ 方向に加速され，点 P_2 から領域 2 に入射した。以後，粒子は円運動(領域 2)，加速(領域 3)，円運動(領域 1)，加速(領域 3)…を繰り返し，円運動の半径は徐々に大きくなっていく。以下の問題に答えよ。

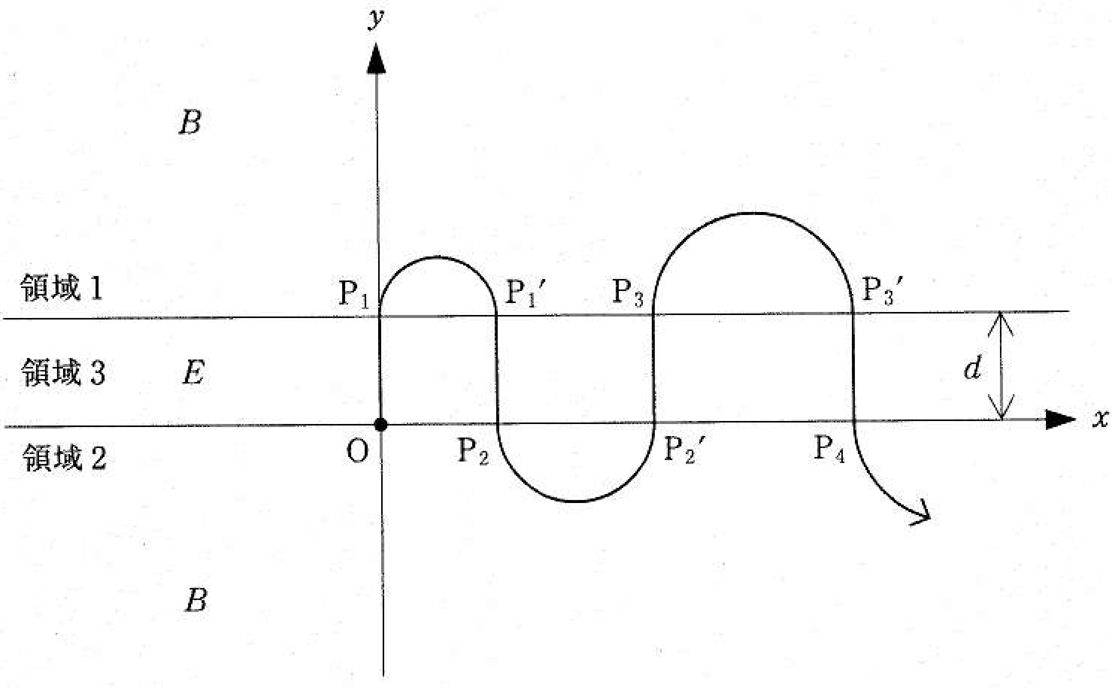

図 3

(1) 領域 1 および領域 2 の磁場の向きは，それぞれ紙面の「表から裏」，「裏から表」のいずれか答えよ。

(2) 荷電粒子が原点 O から P_3' に到達するまでの間，運動エネルギーはどう変化するか。グラフの横軸を原点 O から荷電粒子が運動した軌跡の長さとして図示せよ。なお，解答用紙のグラフの横軸にはあらかじめ点 P_1，P_1'，P_2，P_2'，P_3，P_3' が記入してある。

荷電粒子は領域 3 を n 回目($n = 1, 2, \cdots$)に通過直後，領域 1 または領域 2 に入射して円運動する。この円運動の半径を r_n，円運動している時間を t_n とする。

(3) r_n を，B_0，E，d，m，n，q のうち必要なものを用いて表せ。

(4) t_n を，B_0，E，d，m，n，q のうち必要なものを用いて表せ。

荷電粒子が領域 3 を n 回通過した後，円運動の半径がいつも r_n から変わらないようにしたい。そのためには荷電粒子が領域 3 を $n+N$ 回目($N = 1, 2, \cdots$)に通過直後，入射した領域 1 あるいは領域 2 の磁束密度の大きさを $B_{n,N}$ としなければならない。この時，$n+N$ 回目の円運動をする時間は $t_{n,N}$ となる。

(5) $B_{n,N}$ を，B_0，N，n を用いて表せ。

(6) $\dfrac{t_{n,N}}{t_n}$ を，N，n を用いて表せ。