$\boxed{1}$ (60 点)

正の整数に関する条件

（$*$） 10 進法で表したときに，どの位にも数字 9 が現れない

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) k を正の整数とするとき，10^{k-1} 以上かつ 10^k 未満であって条件（$*$）を満たす正の整数の個数を a_k とする．このとき，a_k を k の式で表せ．

(2) 正の整数 n に対して，

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & (n \text{ が条件}(*)\text{を満たすとき}) \\ 0 & (n \text{ が条件}(*)\text{を満たさないとき}) \end{cases}$$

とおく．このとき，すべての正の整数 k に対して次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\sum_{n=1}^{10^k-1} b_n < 80$$

2 (60 点)

xy 平面上の楕円

$$E : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) a，b を実数とする．直線 $\ell : y = ax + b$ と楕円 E が異なる 2 点を共有するための a，b の条件を求めよ．

(2) 実数 a，b，c に対して，直線 $\ell : y = ax + b$ と直線 $m : y = ax + c$ が，それぞれ楕円 E と異なる 2 点を共有しているとする．ただし，$b > c$ とする．直線 ℓ と楕円 E の 2 つの共有点のうち x 座標の小さい方を P，大きい方を Q とする．また，直線 m と楕円 E の 2 つの共有点のうち x 座標の小さい方を S，大きい方を R とする．このとき，等式

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{SR}}$$

が成り立つための a，b，c の条件を求めよ．

(3) 楕円 E 上の 4 点の組で，それらを 4 頂点とする四角形が正方形であるものをすべて求めよ．

3 (60 点)

以下の問いに答えよ.

(1) 正の整数 n に対して，二項係数に関する次の等式を示せ.

$$n\,{}_{2n}\mathrm{C}_{n} = (n+1)\,{}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$$

また，これを用いて ${}_{2n}\mathrm{C}_{n}$ は $n+1$ の倍数であることを示せ.

(2) 正の整数 n に対して，

$$a_n = \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_{n}}{n+1}$$

とおく．このとき，$n \geqq 4$ ならば $a_n > n+2$ であることを示せ.

(3) a_n が素数となる正の整数 n をすべて求めよ.

4 (60 点)

S を，座標空間内の原点 O を中心とする半径 1 の球面とする．S 上を動く点 A，B，C，D に対して

$$F = 2(\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2) - 3(\mathrm{AD}^2 + \mathrm{BD}^2 + \mathrm{CD}^2)$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{d}$ とするとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ によらない定数 k によって

$$F = k(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - 3\vec{d})$$

と書けることを示し，定数 k を求めよ．

(2) 点 A，B，C，D が球面 S 上を動くときの，F の最大値 M を求めよ．

(3) 点 C の座標が $\left(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{\sqrt{15}}{4}, 0\right)$，点 D の座標が $(1, 0, 0)$ であるとき，$F = M$ となる S 上の点 A，B の組をすべて求めよ．

5 (60 点)

xy 平面上の円 $C : x^2 + (y - a)^2 = a^2 \quad (a > 0)$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 円 C が $y \geqq x^2$ で表される領域に含まれるための a の範囲を求めよ．

(2) 円 C が $y \geqq x^2 - x^4$ で表される領域に含まれるための a の範囲を求めよ．

(3) a が(2)の範囲にあるとする．xy 平面において連立不等式

$$|x| \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 0 \leqq y \leqq \frac{1}{4}, \quad y \geqq x^2 - x^4, \quad x^2 + (y - a)^2 \geqq a^2$$

で表される領域 D を，y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．