

第 1 問

a, b を実数とする。座標平面上の放物線

$$C: y = x^2 + ax + b$$

は放物線 $y = -x^2$ と 2 つの共有点を持ち、一方の共有点の x 座標は $-1 < x < 0$ を満たし、他方の共有点の x 座標は $0 < x < 1$ を満たす。

- (1) 点 (a, b) のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。
- (2) 放物線 C の通りうる範囲を座標平面上に図示せよ。

第 2 問

複素数 a, b, c に対して整式 $f(z) = az^2 + bz + c$ を考える。 i を虚数単位とする。

- (1) α, β, γ を複素数とする。 $f(0) = \alpha, f(1) = \beta, f(i) = \gamma$ が成り立つとき、 a, b, c をそれぞれ α, β, γ で表せ。
- (2) $f(0), f(1), f(i)$ がいずれも 1 以上 2 以下の実数であるとき、 $f(2)$ のとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ。

第 3 問

関数

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 3}$$

に対して、 $y = f(x)$ のグラフを C とする。点 $A(1, f(1))$ における C の接線を

$$\ell: y = g(x)$$

とする。

(1) C と ℓ の共有点で A と異なるものがただ 1 つ存在することを示し、その点の x 座標を求めよ。

(2) (1) で求めた共有点の x 座標を α とする。定積分

$$\int_{\alpha}^1 \{f(x) - g(x)\}^2 dx$$

を計算せよ。

第 4 問

以下の問いに答えよ。

- (1) 正の奇数 K, L と正の整数 A, B が $KA = LB$ を満たしているとする。 K を 4 で割った余りが L を 4 で割った余りと等しいならば、 A を 4 で割った余りは B を 4 で割った余りと等しいことを示せ。
- (2) 正の整数 a, b が $a > b$ を満たしているとする。このとき、 $A = {}_{4a+1}C_{4b+1}$, $B = {}_aC_b$ に対して $KA = LB$ となるような正の奇数 K, L が存在することを示せ。
- (3) a, b は (2) の通りとし、さらに $a - b$ が 2 で割り切れるとする。 ${}_{4a+1}C_{4b+1}$ を 4 で割った余りは ${}_aC_b$ を 4 で割った余りと等しいことを示せ。
- (4) ${}_{2021}C_{37}$ を 4 で割った余りを求めよ。

第 5 問

α を正の実数とする。 $0 \leq \theta \leq \pi$ における θ の関数 $f(\theta)$ を、座標平面上の 2 点 $A(-\alpha, -3)$, $P(\theta + \sin \theta, \cos \theta)$ 間の距離 AP の 2 乗として定める。

(1) $0 < \theta < \pi$ の範囲に $f'(\theta) = 0$ となる θ がただ 1 つ存在することを示せ。

(2) 以下が成り立つような α の範囲を求めよ。

$0 \leq \theta \leq \pi$ における θ の関数 $f(\theta)$ は、区間 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のある点において最大になる。

第 6 問

定数 b, c, p, q, r に対し,

$$x^4 + bx + c = (x^2 + px + q)(x^2 - px + r)$$

が x についての恒等式であるとする。

(1) $p \neq 0$ であるとき, q, r を p, b で表せ。

(2) $p \neq 0$ とする。 b, c が定数 a を用いて

$$b = (a^2 + 1)(a + 2), \quad c = -\left(a + \frac{3}{4}\right)(a^2 + 1)$$

と表されているとき, 有理数を係数とする t についての整式 $f(t)$ と $g(t)$ で

$$\{p^2 - (a^2 + 1)\}\{p^4 + f(a)p^2 + g(a)\} = 0$$

を満たすものを 1 組求めよ。

(3) a を整数とする。 x の 4 次式

$$x^4 + (a^2 + 1)(a + 2)x - \left(a + \frac{3}{4}\right)(a^2 + 1)$$

が有理数を係数とする 2 次式の積に因数分解できるような a をすべて求めよ。