1　(60 点)

次の条件(i), (ii)をともに満たす正の整数 N をすべて求めよ.

(i) N の正の約数は 12 個.

(ii) N の正の約数を小さい方から順に並べたとき, 7 番目の数は 12.

ただし, N の約数には 1 と N も含める.

2 (60 点)

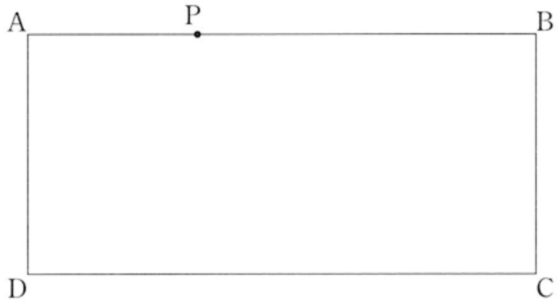
実数 x の関数 $f(x)=\displaystyle\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}\,dt$ の最大値と最小値を求めよ.

3 (60 点)

a を 1 以上の実数とする．図のような長方形の折り紙 ABCD が机の上に置かれている．ただし AD $=1$，AB $=a$ である．P を辺 AB 上の点とし，AP $=x$ とする．頂点 D を持ち上げて P と一致するように折り紙を一回折ったとき，もとの長方形 ABCD からはみ出る部分の面積を S とする．

(1) S を a と x で表せ．

(2) $a=1$ とする．P が A から B まで動くとき，S を最大にするような x の値を求めよ．



なお配布された白紙を自由に使ってよい．（白紙は回収しない．）

4 (60 点)

n は正の整数とし，文字 a，b，c を重複を許して n 個並べてできる文字列すべての集合を A_n とする．A_n の要素に対し次の条件(＊)を考える．

(＊) 文字 c が 2 つ以上連続して現れない．

以下 A_n から要素を一つ選ぶとき，どの要素も同じ確率で選ばれるとする．

(1) A_n から要素を一つ選ぶとき，それが条件(＊)を満たす確率 $P(n)$ を求めよ．

(2) $n \geqq 12$ とする．A_n から要素を一つ選んだところ，これは条件(＊)を満たし，その 7 番目の文字は c であった．このとき，この要素の 10 番目の文字が c である確率を $Q(n)$ とする．極限値 $\lim_{n \to \infty} Q(n)$ を求めよ．

5 (60 点)

実数 a, b, c に対して $F(x)=x^4+ax^3+bx^2+ax+1$, $f(x)=x^2+cx+1$ とおく．また，複素数平面内の単位円周から2点1，-1 を除いたものを T とする．

(1) $f(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を c を用いて表せ．

(2) $F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるならば，

$$F(x)=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)$$

を満たす実数 c_1, c_2 が存在することを示せ．

(3) $F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を a, b を用いて表し，それを満たす点 $(a,\ b)$ の範囲を座標平面上に図示せよ．