平成３１年度前期日程　数学　解答例

略解

$\boxed{1}$ **(1)** $s < t$ なので $S = \dfrac{1}{2}h(t-s)$ 更に $2R = h(s+t)$ とすると,

$$\begin{aligned} p^2+q^2+r^2-4\sqrt{3}S &= h^2+s^2+h^2+t^2+(t-s)^2-2\sqrt{3}h(t-s) \\ &= \frac{4}{h^2}\left(\frac{3}{2}\left(S-\frac{h^2}{\sqrt{3}}\right)^2+\frac{1}{2}R^2\right) \geq 0 \end{aligned}$$

であり等号が成立するのは $R=0$ かつ $S=h^2/\sqrt{3}$ の場合, 即ち $t=h/\sqrt{3}$, $s=-h/\sqrt{3}$. これは三角形 OAB が正三角形であることと同値.

(2) 三角形 ABC, ADC, ADB, BCD の面積をそれぞれ S_1, S_2, S_3, S_4 とすると **(1)** の結果より

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &\geq 4\sqrt{3}S_1 \\ b^2+n^2+\ell^2 &\geq 4\sqrt{3}S_2 \\ \ell^2+m^2+c^2 &\geq 4\sqrt{3}S_3 \\ a^2+m^2+n^2 &\geq 4\sqrt{3}S_4 \end{aligned}$$

以上より

$$2(\ell^2+m^2+n^2+a^2+b^2+c^2) \geq 4\sqrt{3}(S_1+S_2+S_3+S_4) = 4\sqrt{3}T$$

を得る. 等号が成立するのは三角形 ABC, ADC, ADB, BCD が正三角形, すなわち四面体 ABCD が正四面体の場合である.

$\boxed{2}$ $A = 5-8\log 2$, $B = (4\log 2+5)\log 2$, $f(x) = 6x\log x + \dfrac{5-8\log 2}{2}$

$\boxed{3}$ **(1)** $\left\{ r \,\middle|\, \dfrac{2}{\sqrt{13}} \leq r < \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}} \right\}$

(2) 12 個

$\boxed{4}$ **(1)**

$$\frac{1}{6}\left(n^3+5n+6\right)$$

(2)

$$\frac{1}{6}\left(n^3+5n\right)$$

(3)

$$\begin{aligned} &n \neq 4 \text{ の場合:} \quad \frac{1}{6}\left(n^3+5n-6\right) \\ &n = 4 \text{ の場合:} \quad 12 \end{aligned}$$

$\boxed{5}$ **(1)** $f(x) = (x+1)\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$, $(x>0)$ とする.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \log\left(1+\frac{1}{x}\right) + (x+1)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \\ &= \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

であるが, ここで $y = \log(1+z)$ および $y = z$ の $z>0$ におけるグラフの様子より $z>0$ では $\log(1+z) - z < 0$ が成立する. よって $z = 1/x$ とすれば $x>0$ において $f'(x) < 0$ である.

(2)

$M = \dfrac{3^{11}}{2^{17}}$ であり, これは $k = 2, 3$ のとき.