

2020年度
慶應義塾大学入学試験問題
商 学 部
数 学

- 注 意
1. 受験番号と氏名は、解答用紙 A（マークシート）と解答用紙 B のそれぞれ所定の欄に必ず記入すること。さらに、解答用紙 A（マークシート）の受験番号欄をマークすること。
 2. 解答は、必ず指定された解答用紙の所定の欄に記入ないしマークすること。解答欄外の余白および採点欄には一切記入してはならない。
 3. 解答用紙 A（マークシート）への記入に先立って、用紙上に記載された注意事項を必ず読むこと。
 4. 試験開始後、2 ページに記載された「解答するにあたっての注意」を読んだから解答すること。
 5. 問題用紙は下書きに用いてよろしい。
 6. この冊子の総ページ数は 8 ページである。なお、中に計算用紙（ページ番号なし）が折り込まれている。

試験開始の合図とともに全てのページが揃っているか確認してください。ページが抜けていたり重複するページがあったら直ちに監督者に申し出てください。

《指示があるまで開かないこと》

《 解答するにあたっての注意 》

1. 問題IVの解答は**解答用紙 B**の所定の位置に記入し、それ以外の問題の解答は**解答用紙 A (マークシート)**にマークしなさい。
2. 分数形で解答する場合、それ以上約分できない形で解答しなさい。根号を含む形で解答する場合、根号の中に現れる自然数が最小となる形で解答しなさい。それ以外でも、できるだけ簡単な形で解答しなさい。
3. マークシートにある \ominus はマイナス符号 $-$ を意味する。**解答用紙 A (マークシート)**に分数の符号を解答する場合は、マイナス符号は分子につけ、分母につけてはいけない。マークシートの記入にあたっては、次の例を参考にしなさい。

[例 1]

(11)	(12)
------	------

 と表示のある問いに対して、「34」と解答する場合には、以下に示すように解答欄 (11) の③と解答欄 (12) の④にマークしなさい。

[例 2]

(13)	(14)	(15)
------	------	------

 と表示のある問いに対して、「 -56 」と解答する場合には、以下に示すように解答欄 (13) の \ominus 、解答欄 (14) の⑤、および解答欄 (15) の⑥にマークしなさい。

[例 3]

(16)	(17)
(18)	(19)

 と表示のある問いに対して、「 $-\frac{7}{89}$ 」と解答する場合には、以下に示すように解答欄 (16) の \ominus 、解答欄 (17) の⑦、解答欄 (18) の⑧、および解答欄 (19) の⑨にマークしなさい。

[例 1]

(11)	(12)
①	①
②	②
●	③
④	●
⑤	⑤
⑥	⑥
⑦	⑦
⑧	⑧
⑨	⑨
⑩	⑩
⊖	⊖

[例 2]

(13)	(14)	(15)
①	①	①
②	②	②
③	③	③
④	④	④
⑤	●	⑤
⑥	⑥	●
⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨
⑩	⑩	⑩
●	⊖	⊖

[例 3]

(16)	(17)	(18)	(19)
①	①	①	①
②	②	②	②
③	③	③	③
④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤
⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	●	⑦	⑦
⑧	⑧	●	⑧
⑨	⑨	⑨	●
⑩	⊖	⊖	⊖
●	⊖	⊖	⊖

I. 以下の問いに答えよ。

(i) z を複素数とし、数列 $\{a_n\}$ が漸化式 $a_{n+1} = za_n - z^2$ を満たすとする。

$$z = \frac{\boxed{(1)}}{\boxed{(2)}} \pm \frac{\sqrt{\boxed{(3)}}}{\boxed{(4)}} i \text{ のとき、一般項が } a_n = 1 \text{ (} n = 1, 2, \dots \text{)} \text{ となる。}$$

(ii) 実数 a に対し、 $f(x) = |x| + a$ とおく。 $\int_{-5}^5 |f(x)| dx$ が最小となるのは

$$a = \frac{\boxed{(5)} \dots \boxed{(6)}}{\boxed{(7)}} \text{ のときである。}$$

(iii) $f(x) = 4x^3 - 3x$ とし、その導関数を $f'(x)$ とする。 $f'(\sin \theta) = 3 - 3\sqrt{2}$ を満たす θ ($0 < \theta < \pi$) は

$$\frac{\boxed{(8)}}{\boxed{(9)}} \pi, \frac{\boxed{(10)}}{\boxed{(11)}} \pi$$

である。また、 $f(\cos \theta) = \frac{1}{2}$ を満たす θ ($0 < \theta < \pi$) は

$$\frac{\boxed{(12)}}{\boxed{(13)}} \pi, \frac{\boxed{(14)}}{\boxed{(15)}} \pi, \frac{\boxed{(16)}}{\boxed{(17)}} \pi$$

である。

(iv) $\sum_{r=0}^5 {}_5C_r \tan^{2r} \frac{\pi}{3} = \boxed{(18) \dots (19) \dots (20) \dots (21)}$ である。

(v) 数列 $\{a_n\}$ が漸化式 $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n^3$ を満たし、 $a_1 = 4$ とする。このとき、

$$\log_2 a_{n+1} = \boxed{(22)} \log_2 a_n - \boxed{(23)}$$

であり、 $a_n > 2 \cdot 10^{30100}$ を満たす最小の自然数 n は $\boxed{(24) \dots (25)}$ である。ただし、必要であれば $\log_{10} 2 = 0.301$, $\log_{10} 3 = 0.477$ を近似として用いてもよい。

II. 座標平面上の原点を中心とする半径1の円上の動点A, B, Cを考える。以下, Aが(1,0), Bが(0,1), Cが(-1,0)にいる状態を初期状態と呼ぶ。

8枚の硬貨 $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_8$ を同時に投げる試行をTとする。A, B, Cはいずれも, 試行Tを行うたびに次の規則に従って動く。

$$n = 1, 2, 3, \dots, 8 \text{ に対して, } \left(\cos \frac{n}{4}\pi, \sin \frac{n}{4}\pi \right) \text{ にいる動点は,}$$

$$\text{硬貨 } Q_n \text{ が表となったとき } \left(\cos \frac{n+1}{4}\pi, \sin \frac{n+1}{4}\pi \right) \text{ に動き,}$$

$$\text{硬貨 } Q_n \text{ が裏となったとき } \left(\cos \frac{n-1}{4}\pi, \sin \frac{n-1}{4}\pi \right) \text{ に動く。}$$

この規則により, ある時点で座標が一致している複数の動点は, 試行Tの後も座標が一致する。

- (i) 初期状態から試行Tを2回行ったとき, AとBの座標が一致している確率は $\frac{\boxed{(26)}}{\boxed{(27)}}$ であり, AとCの座標が一致している確率は $\frac{\boxed{(28)}}{\boxed{(29)}}$ で

ある。また, A, B, Cの座標が全て一致している確率は $\frac{\boxed{(30)}}{\boxed{(31) \cdots (32)}}$ である。

- (ii) 初期状態から試行Tを2回行ったとき, AとBの座標が一致していると
する。このとき, Cの座標がA, Bの座標と一致している確率は $\frac{\boxed{(33)}}{\boxed{(34)}}$
である。

- (iii) 初期状態から試行Tを4回行ったとき, AとCの座標が一致している
確率は $\frac{\boxed{(35) \cdots (36)}}{\boxed{(37) \cdots (38)}}$ である。

- (iv) 初期状態から試行Tを5回行ったとき, AとCの座標が一致している
確率は $\frac{\boxed{(39) \cdots (40)}}{\boxed{(41) \cdots (42)}}$ である。

計算用紙

以下は計算用です。解答は解答用紙に記入してください。



計算用紙

III. 座標平面の原点を O とする。関数 $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ に対して 2 点 $A(x, f(x))$, $B(2x, f(x) + xf'(x))$ を考える。ただし, $x \neq 0$ とする。

(i) 2 点 A, B を通る直線上の点を P とすると, \overrightarrow{OP} は実数 t を用いて

$$\overrightarrow{OP} = \left(x(t + \boxed{(43)}), f(x) + txf'(x) \right)$$

と表せる。

以下, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$ とする。

(ii) ベクトル \overrightarrow{OP} の大きさ $|\overrightarrow{OP}|$ が最小となるのは

$$t = -\frac{x^2 + \boxed{(44)}}{\boxed{(45)}(x^2 + \boxed{(46)})}$$

のときで, そのとき

$$|\overrightarrow{OP}| = \frac{|x^2 - \boxed{(47)}|}{\boxed{(48)}\sqrt{x^2 + \boxed{(49)}}}$$

である。

(iii) $0 < x < 2$ の範囲で $\triangle OAB$ の面積 S が最大となるのは

$$x = \frac{\boxed{(50)}\sqrt{\boxed{(51)}}}{\boxed{(52)}}$$

のときで, そのとき

$$S = \frac{\boxed{(53)}\sqrt{\boxed{(54)}}}{\boxed{(55)}}$$

である。

IV. 座標空間内で、原点 O を中心とする半径 r の球面 S を考える。 h を正の実数として、 z 軸上の点 $H(0, 0, r+h)$ を通る平面のうち、 zx 平面上の点 A で球面 S と接するものを α 、 yz 平面上の点 B で球面 S と接するものを β とする (ただし、点 A の x 座標と点 B の y 座標は正とする)。

$t = \frac{h}{r}$ として、空欄 \sim に入る t を用いた適切な式を、また、空欄 に入る適切な整数を、それぞれ解答用紙 B の所定の欄に記述しなさい。ただし、解答には r と h を用いてはならない。

(i) 点 A の座標は

$$\left(\text{} r, 0, \text{} r \right)$$

である。

(ii) 平面 α の方程式は

$$\text{} x + z = \text{} r$$

である。

(iii) 平面 α の法線ベクトルと平面 β の法線ベクトルのなす角が θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) であったとする。このとき、

$$\cos \theta = \text{}$$

である。

(iv) $r = 6400$, $h = 400$ のとき、鋭角 θ の大きさを度数法を用いて最も近い整数で表すと

$$\theta \doteq \text{}^\circ$$

となる。ただし、必要であれば三角比の表を用いてよい。

三角比の表

θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
0°	0.0000	1.0000	0.0000	45°	0.7071	0.7071	1.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.7475
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.9042
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.0777
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.2709
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.4874
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2588	3.7321
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.0108
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.3315
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.7046
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.1446
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.6713
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.3138
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.1154
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.1443
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.5144
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.4301
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.3007
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.0811
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.6363
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	90°	1.0000	0.0000	なし

《 以下余白 》