

1

n を自然数とする。1 から $3n + 1$ までの自然数を並べかえて、順に

$$a_1, a_2, \dots, a_{n+1}, b_1, b_2, \dots, b_n, c_1, c_2, \dots, c_n$$

とおく。また、次の条件 (C1), (C2) が成立しているとする。

(C1) $3n$ 個の値

$$|a_1 - a_2|, |a_2 - a_3|, \dots, |a_n - a_{n+1}|,$$

$$|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \dots, |a_n - b_n|,$$

$$|a_1 - c_1|, |a_2 - c_2|, \dots, |a_n - c_n|$$

は、すべて互いに異なる。

(C2) 1 以上 n 以下のすべての自然数 k に対し

$$|a_k - b_k| > |a_k - c_k| > |a_k - a_{k+1}|$$

が成り立つ。

このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) $n = 1$ かつ $a_1 = 1$ のとき、 a_2, b_1, c_1 を求めよ。
- (2) $n = 2$ かつ $a_1 = 7$ のとき、 $a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2$ を求めよ。
- (3) $n \geq 2$ かつ $a_1 = 1$ のとき、 a_3 を求めよ。
- (4) $n = 2017$ かつ $a_1 = 1$ のとき、 a_{29}, b_{29}, c_{29} を求めよ。

2 xyz 空間において、点 $O(0, 0, 0)$ と点 $A(0, 0, 1)$ を結ぶ線分 OA を直径にもつ球面を σ とする。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) 球面 σ の方程式を求めよ。
- (2) xy 平面上にあって O と異なる点 P に対して、線分 AP と球面 σ との交点を Q とするとき、 $\overrightarrow{OQ} \perp \overrightarrow{AP}$ を示せ。
- (3) 点 $S(p, q, r)$ を、 $\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{AS} = -|\overrightarrow{OS}|^2$ を満たす、 xy 平面上にない定点とする。 σ 上の点 Q が $\overrightarrow{OS} \perp \overrightarrow{SQ}$ を満たしながら動くとき、直線 AQ と xy 平面との交点 P はどのような図形を描くか。 p, q, r を用いて答えよ。

3 連続関数 $f(x)$ と定数 a が次の関係式を満たしているとする。

$$\int_0^x f(t) dt = 4ax^3 + (1 - 3a)x + \int_0^x \left\{ \int_0^u f(t) dt \right\} du + \int_x^1 \left\{ \int_u^1 f(t) dt \right\} du$$

このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) a と $f(0) + f(1)$ の値を求めよ。
- (2) $g(x) = e^{-2x}f(x)$ とおくとき、 $g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を求めよ。ここで e は自然対数の底を表す。
- (3) $f(x)$ を求めよ。