$\boxed{1}$ 以下の各問の解答を所定欄に記入せよ。

(1) 実数を係数とする 3 次式 $f(x)$ は $f(1+i)=4+3i$ かつ $f(1+2i)=4$ を満たすとする。このとき $f(x)$ を求めよ。

(2) $a$ と $p$ を正の実数とする。座標平面上に原点 $\mathrm{O}(0,0)$ を通る放物線 $y=ax^2$ と点 $\mathrm{P}(0,p)$ がある。点 A がこの放物線上を動くとき，線分 AP の長さは $\mathrm{A}=\mathrm{O}$ において最小値をとるとする。$p$ を固定したとき，この条件を満たすような $a$ の最大値を $p$ を用いて表せ。

(3) 点 P は，数直線上の点 1 から出発し，さいころの出る目が 1，2，3，4 ならば $+1$ だけ，5，6 ならば $-1$ だけ動く。この試行を繰り返し，点 P が点 0 または点 5 に到達したときに試行は終了するものとする。点 P が点 5 に到達して終了する確率を求めよ。

(4) $a$ を正の実数とする。座標平面において不等式 $x^2+y^2 \leqq 1$ と不等式 $y \geqq \dfrac{e^{ax}}{a}$ の表す領域の共通部分の面積を $S(a)$ とするとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} S(a)$ を求めよ。

$\boxed{2}$ AC および BD を対角線にもつ 4 角形 ABCD があり，点 O を中心とする円が 4 角形 ABCD に外接しているとする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ で表す。

(1) ベクトル $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ と $\vec{a}+\vec{b}+\vec{d}$ の大きさが等しいならば，辺 AB と辺 CD は平行であるかまたは点 O は辺 AB 上にあることを証明せよ。

(2) 3 角形 ABC, BCD, CDA, DAB の重心がすべて点 O から等しい距離にあるならば，4 角形 ABCD は長方形であることを証明せよ。

$\boxed{3}$ すべての正の実数 $x$ に対して $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x < 3$ であり，また $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ であることが知られている。以下では $n$ は自然数とし，$i$ は虚数単位を表すとする。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|1+\dfrac{i}{n}\right|^n$ を求めよ。

(2) $\left(1+\dfrac{i}{n}\right)^n$ の実部を $a_n$，虚部を $b_n$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ。

$\boxed{4}$ 座標平面上に，$y = x\sqrt{x}$ $(x \geqq 0)$ で表される曲線 $C_1$，および $y = x^2$ $(x \geqq 0)$ で表される曲線 $C_2$ がある。点 $(1,1)$ における曲線 $C_1$ の接線を $L_1$ とする。以下の計算では，必要ならば $\sqrt{5} = 2.236\cdots$，$\sqrt{13} = 3.605\cdots$ を用いてもよい。

(1) 接線 $L_1$ と曲線 $C_2$ の 2 つの交点を結ぶ線分の長さを求めよ。

(2) 曲線 $C_1$ の $0 \leqq x \leqq 1$ の部分の長さを求めよ。

(3) 曲線 $C_2$ の $0 \leqq x \leqq 1$ の部分の長さは，曲線 $C_1$ の $0 \leqq x \leqq 1$ の部分の長さより大きいことを証明せよ。

〔以　下　余　白〕