第　1　問

座標平面において2つの放物線 $A:\ y=s(x-1)^2$ と $B:\ y=-x^2+t^2$ を考える。ただし s,t は実数で，$0<s,\ 0<t<1$ をみたすとする。放物線 A と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を P とし，放物線 B の $x \geqq 0$ の部分と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を Q とする。A と B がただ1点を共有するとき，$\dfrac{Q}{P}$ の最大値を求めよ。

第　2　問

1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF が与えられている。点 P が辺 AB 上を，点 Q が辺 CD 上をそれぞれ独立に動くとき，線分 PQ を $2:1$ に内分する点 R が通りうる範囲の面積を求めよ。

第　3　問

座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という。格子点上を次の規則 (a), (b) に従って動く点 P を考える。

(a) 最初に，点 P は原点 O にある。

(b) ある時刻で点 P が格子点 $(m,\ n)$ にあるとき，その 1 秒後の点 P の位置は，隣接する格子点 $(m+1,\ n)$, $(m,\ n+1)$, $(m-1,\ n)$, $(m,\ n-1)$ のいずれかであり，また，これらの点に移動する確率は，それぞれ $\dfrac{1}{4}$ である。

(1) 最初から 1 秒後の点 P の座標を $(s,\ t)$ とする。$t-s=-1$ となる確率を求めよ。

(2) 点 P が，最初から 6 秒後に直線 $y=x$ 上にある確率を求めよ。

第　4　問

$p = 2 + \sqrt{5}$ とおき，自然数 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$a_n = p^n + \left(-\frac{1}{p}\right)^n$$

と定める。以下の問いに答えよ。ただし設問 (1) は結論のみを書けばよい。

(1) $a_1,\, a_2$ の値を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ とする。積 $a_1 a_n$ を，a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ。

(3) a_n は自然数であることを示せ。

(4) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。