2019年度

慶應義塾大学入学試験問題

経済学部

数学

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いたり，裏返したりしてはいけません.
2. 数学の問題冊子は全部で12ページです．問題は3，4，5，8，9，10ページに印刷してあります．試験開始の合図とともにすべてのページが揃っているか確認してください．ページが抜けていたり重複するページがあれば，直ちに監督者に申し出てください.
3. 解答用紙は，解答用紙A（マークシート）が1枚と，解答用紙Bが1枚です．問題の［1］から［3］は解答用紙A（マークシート）に，問題の［4］から［6］は解答用紙Bに解答してください.
4. 受験番号と氏名を，解答用紙A（マークシート）および解答用紙Bのそれぞれ所定の欄に必ず記入してください．さらに，解答用紙A（マークシート）には受験番号を忘れずにマークしてください.
5. 解答用紙A（マークシート）への記入に先立って，解答用紙A（マークシート）に記載された注意事項を読んでください．また，試験開始の合図があった後，問題冊子の2ページ目に記載された「解答用紙A（マークシート）の記入に関する注意事項」を必ず読んでください.
6. 問題冊子の余白および6，7，11，12ページは，計算および下書きに用いてもかまいません．ただし，1ページ目には何も書いてはいけません.
7. 解答用紙Bの余白および裏面には何も書いてはいけません.
8. 数学の問題のうち，問題の［1］から［3］が最初に採点されます．問題の［4］から［6］は，数学の最初に採点される問題と英語の最初に採点される問題の得点が一定点に達した受験生についてのみ，採点されます.
9. 問題冊子は試験終了後必ず持ち帰ってください.

解答用紙A（マークシート）の記入に関する注意事項

1. 問題の[1]から[3]の解答は，解答用紙A（マークシート）の解答欄にマークしてください．

[例]　$\boxed{(11)}\boxed{(12)}$ と表示のある問いに対して，「45」と解答する場合は，右の例のように解答欄(11)の $\boxed{4}$ と解答欄(12)の $\boxed{5}$ にマークしてください．

なお，解答欄にある $\boxed{-}$ はマイナスの符号 − を意味します．

(11)	(12)
1	1
2	2
3	3
●	4
5	●
6	6
7	7
8	8
9	9
0	0
−	−

2. 解答欄(1), (2), ⋯ は，それぞれ0から9までの数字，またはマイナスの符号 − のいずれか1つに対応します．それらを(1), (2), ⋯ で示された解答欄にマークしてください．

下の例のように，数字は右によせて表示し，マイナスの符号 − は左端に置いてください．空のマスがあれば0を補ってください．解答が分数のときは，分母を正で，約分しきった形で解答してください．

[例]

$3 \longrightarrow \boxed{0}\boxed{3}$　　　　$0 \longrightarrow \boxed{0}\boxed{0}$

$$3 \longrightarrow \frac{3}{1} \longrightarrow \frac{\boxed{0}\boxed{3}}{\boxed{0}\boxed{1}}$$

$$x - y \longrightarrow 1x + (-1)y \longrightarrow \boxed{0}\boxed{1}\,x + \boxed{-}\boxed{1}\,y$$

$$-\frac{4}{6} \longrightarrow \frac{-2}{3} \longrightarrow \frac{\boxed{-}\boxed{2}}{\boxed{0}\boxed{3}}$$

[1] 座標平面上の直線 $y=-\sqrt{3}x+6\sqrt{3}$ を ℓ とし，原点 O，点 P$(6,0)$，および ℓ 上の点 Q の 3 点を通る円を C とする．ただし，点 Q の y 座標は正とする．

(1) 円 C の中心が x 軸上にあるとき，C の中心の x 座標は $\boxed{(1)}$ であり，このとき $\angle\mathrm{OQP}=\dfrac{\boxed{(2)}\pi}{\boxed{(3)}}$ となる．

(2) 円 C の半径が $2\sqrt{3}$ であるとき，C の中心の y 座標は $\sqrt{\boxed{(4)}}$ となる．このとき，点 Q の y 座標は $\boxed{(5)}\sqrt{\boxed{(6)}}$ である．

以下，$\angle\mathrm{OQP}=\dfrac{5\pi}{12}$ とする．

(3) 点 Q の y 座標は $\boxed{(7)}-\boxed{(8)}\sqrt{\boxed{(9)}}$ となる．

(4) 関係 $\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4}$ と加法定理から，$\sin\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{\boxed{(10)}}+\sqrt{2}}{\boxed{(11)}}$ と求まる．

円 C の半径は $\boxed{(12)}\left(\sqrt{\boxed{(13)}}-\sqrt{\boxed{(14)}}\right)$ である．

[2] 赤，黄，白，黒の 4 種類の色の球が袋に合計 24 個入っているとする．この袋から球を 1 つ取り出して，色を調べてから袋に戻すことを試行という．以下 (a), (b), (c) が成り立つとする．

(a) 試行を 1 回行うとき，赤または黄の球が取り出される確率は $\frac{1}{4}$ である．

(b) 試行を 2 回続けて行うとき，赤と黄の球がそれぞれ 1 回ずつ取り出される確率は $\frac{1}{36}$ である．

(c) 試行を 3 回続けて行うとき，白の球が 1 回，黒の球が 2 回取り出される確率は $\frac{49}{288}$ である．

(1) 試行を 2 回続けて行うとき，赤または黄の球が 1 回，かつ，白または黒の球が 1 回取り出される確率は $\dfrac{\boxed{(15)}}{\boxed{(16)}}$ である．

(2) 試行を 3 回続けて行うとき，3 回とも赤の球，または，3 回とも黄の球が取り出される確率は $\dfrac{\boxed{(17)}}{\boxed{(18)}\boxed{(19)}\boxed{(20)}}$ である．

(3) 袋に入っている黒の球は $\boxed{(21)}\boxed{(22)}$ 個，白の球は $\boxed{(23)}$ 個である．

(4) 試行を 4 回続けて行うとき，白の球がちょうど 2 回取り出される確率は $\dfrac{\boxed{(24)}\boxed{(25)}}{\boxed{(26)}\boxed{(27)}\boxed{(28)}}$ である．

[3] r を 1 でない正の実数とし，数列 $\{a_n\}$ を，初項 $a_1 = r$ および漸化式

$$\begin{cases} a_{2m} = a_{2m-1} + 2m + 1 \\ a_{2m+1} = r a_{2m} \end{cases} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

で定める．

(1) $a_2 = r + \boxed{(29)}$，$a_3 = r^2 + \boxed{(30)}\, r$，$a_4 = r^2 + \boxed{(31)}\, r + \boxed{(32)}$ である．

(2) $m \geqq 1$ に対し，$b_m = a_{2m-1}$ とおく．数列 $\{b_m\}$ は，初項 $b_1 = \boxed{(33)}\, r$ および漸化式

$$b_{m+1} = r\left(b_m + \boxed{(34)}\, m + \boxed{(35)}\right) \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

を満たす．さらに，$m \geqq 1$ に対して $c_m = \dfrac{b_m}{r^m}$ とおくと，数列 $\{c_m\}$ の初項は $c_1 = \boxed{(36)}$，隣り合う 2 項の差は $d_k = c_{k+1} - c_k = \dfrac{\boxed{(37)}\, k + \boxed{(38)}}{r^k}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ なので，$m \geqq 2$ ならば

$$c_m = c_1 + \sum_{k=1}^{m+\boxed{(39)}\boxed{(40)}} d_k = \sum_{l=1}^{m} \frac{\boxed{(41)}\, l + \boxed{(42)}\boxed{(43)}}{r^{l-1}}$$

となる．ここで

$$1 + \left(1 - \frac{1}{r}\right) c_m = \sum_{l=1}^{m} \frac{\boxed{(44)}}{r^{l-1}} - \frac{\boxed{(45)}\, m - \boxed{(46)}}{r^m}$$

であるから

$$c_m = \frac{\boxed{(47)}\,(r^m - 1)}{r^{m-2}(r-1)^2} - \frac{\boxed{(48)}\, m - \boxed{(49)}}{r^{m-1}(r-1)} - \frac{r}{r-1}$$

となる．この式は $m = 1$ のときも成り立つ．

(3) $m \geqq 1$ に対して，$a_{2m-1} = r^m c_m$ より

$$a_{2m-1} = \frac{1}{(r-1)^2}\left\{r^{m+2} + r^{m+1} - \left(\boxed{(50)}\, m + \boxed{(51)}\right) r^2 + \left(\boxed{(52)}\, m - \boxed{(53)}\right) r\right\}$$

$$a_{2m} = \frac{1}{(r-1)^2}\left\{r^{m+2} + r^{m+1} - \left(\boxed{(54)}\, m + \boxed{(55)}\right) r + \left(\boxed{(56)}\, m + \boxed{(57)}\right)\right\}$$

となる．

計 算 用 紙

計算用紙

[4] 実数 x, y, z は連立方程式

$$\begin{cases} 2^{x-1}+3^{y+3}+5^{z+2}=1 \\ 2^{x+1}+3^{y+1}-5^{z+1}=1 \end{cases}$$

を満たすとする．

(1) $X=2^x$ とおく．3^y, 5^z を，それぞれ X を用いて表せ．さらに x の取りうる値の範囲を，$\log_2 5$ と $\log_2 7$ を用いて表せ．

(2) 整式 Y^3+Z^3 を，$P=Y+Z$, $Q=YZ$ とおき，P と Q を用いて表せ．

(3) 27^y+125^z が最小となるような x の値を，$\log_2 3$, $\log_2 5$, $\log_2 7$ を用いて表せ．

[5] 四面体 OABC において，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = 5, \qquad \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = 4, \qquad \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| = 3, \qquad \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{21}$$

であるとする．$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．以下，$\vec{p} \cdot \vec{q}$ はベクトル $\vec{p}$ と $\vec{q}$ の内積を表す．

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求めよ．

以下，$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ であるとする．線分 BC を $2:1$ に内分する点を M とし，直線 OA を ℓ_1，直線 BC を ℓ_2 とするとき，ℓ_1 上の点 N に対して，$\mathrm{MN} \perp \ell_1$ かつ $\mathrm{MN} \perp \ell_2$ が成り立つとする．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{ON}} = s\vec{a}$ を満たす実数 s を求めよ．さらに，$\vec{b} \cdot \vec{c}$ の値を求めよ．

(3) $\left|\overrightarrow{\mathrm{MN}}\right|^2$ の値を求めよ．

(4) 直線 ℓ_1 上の 2 点と直線 ℓ_2 上の 2 点を頂点とする正四面体の一辺の長さ d を求めよ．

[6] $F(x)$ は x の 3 次式で，x^3 の係数は 1 であるとし，$y = F(x)$ で定まる曲線を C とする．$\alpha_1 < \alpha_2$ を満たす実数 α_1, α_2 に対して，曲線 C は，x 軸と 2 点 $(\alpha_1, 0)$, $(\alpha_2, 0)$ を共有し，さらに x 軸は点 $(\alpha_2, 0)$ における C の接線であるとする．

(1) 関数 $F(x)$ は $x = \alpha$ において極大になり，$x = \beta$ において極小になるとする．このとき α, β を，それぞれ α_1, α_2 のみを含む式で表せ．必要ならば x の整式で表される関数 $p(x)$, $q(x)$ とそれらの導関数に関して成り立つ公式

$$\{p(x)q(x)\}' = p'(x)q(x) + p(x)q'(x)$$

を用いてもよい．

(2) $f(x) = F'(x)$ とする．点 $\mathrm{A}\bigl(\alpha, F(\alpha)\bigr)$ における曲線 C の接線を ℓ とし，ℓ と C の共有点で A と異なる点を $\bigl(\gamma, F(\gamma)\bigr)$ とする．このとき $f(\gamma)$ を，α, γ のみを含む式で表せ．さらに γ を，α_1, α_2 のみを含む式で表せ．

(3) x 軸，曲線 $y = f(x)$，および直線 $x = \gamma$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和 S を，α_1, α_2 のみを含む式で表せ．また $\alpha_1^2 + 1 \leqq \alpha_2$ が成り立つとき，S の最小値 T を求めよ．

計 算 用 紙

計 算 用 紙