〔1〕 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする。放物線 $y = x^2$ 上に3点 $\mathrm{O}(0, 0)$，$\mathrm{A}(\tan\theta,\ \tan^2\theta)$，$\mathrm{B}(-\tan\theta,\ \tan^2\theta)$ をとる。三角形 OAB の内心の y 座標を p とし，外心の y 座標を q とする。また，正の実数 a に対して，直線 $y = a$ と放物線 $y = x^2$ で囲まれた図形の面積を $S(a)$ で表す。

(1) p，q を $\cos\theta$ を用いて表せ。

(2) $\dfrac{S(p)}{S(q)}$ が整数であるような $\cos\theta$ の値をすべて求めよ。

〔2〕 放物線 $C: y = x^2 + ax + b$ が2直線 $\ell_1: y = px\ (p > 0)$, $\ell_2: y = qx\ (q < 0)$ と接している。また，C と ℓ_1，ℓ_2 で囲まれた図形の面積を S とする。

(1) a，b を p，q を用いてそれぞれ表せ。

(2) S を p，q を用いて表せ。

(3) ℓ_1，ℓ_2 が直交するように p，q が動くとき，S の最小値を求めよ。

〔3〕 正三角形OABに対し，直線OA上の点P_1，P_2，P_3，… および直線OB上の点Q_1，Q_2，Q_3，… を，次の(I)，(II)，(III)を満たすようにとる。

(I) $P_1 = A$ である。

(II) 線分P_1Q_1，P_2Q_2，P_3Q_3，… はすべて直線OAに垂直である。

(III) 線分Q_1P_2，Q_2P_3，Q_3P_4，… はすべて直線OBに垂直である。

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおく。点Oを基準とする位置ベクトルが，整数k，ℓによって$k\vec{a} + \ell\vec{b}$と表される点全体の集合をSとする。nを自然数とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OP_n}$と$\overrightarrow{OQ_n}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{OR} = x\vec{a} + y\vec{b}$で定まる点Rが線分$Q_nP_{n+1}$上にあるとき，$x$を$y$を用いて表せ。また，線分$Q_nP_{n+1}$上にある$S$の点の個数を求めよ。

(3) 三角形$OP_{n+1}Q_n$の周または内部にあるSの点の個数を求めよ。

〔4〕 2つの曲線

$$C_1 : y = \frac{1}{\sqrt{2}\sin x} \quad (0 < x < \pi),$$

$$C_2 : y = \sqrt{2}(\sin x - \cos x) \quad (0 < x < \pi)$$

について以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点の x 座標を求めよ。

(2) 曲線 C_1 と曲線 C_2 とで囲まれた図形を x 軸のまわりに1回転させてできる回転体の体積 V が π^2 であることを示せ。

〔５〕 $f(x)=\int_0^x \dfrac{4\pi}{t^2+\pi^2}\,dt$ とし，$c \geqq \pi$ とする。数列 $\{a_n\}$ を $a_1=c$, $a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ で定める。

(1) $f(\pi)$ を求めよ。また，$x \geqq \pi$ のとき，$0<f'(x) \leqq \dfrac{2}{\pi}$ が成り立つことを示せ。

(2) すべての自然数 n に対して，$a_n \geqq \pi$ が成り立つことを示せ。

(3) すべての自然数 n に対して，$|a_{n+1}-\pi| \leqq \dfrac{2}{\pi}|a_n-\pi|$ が成り立つことを示せ。また，$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

〔6〕 複素数αに対して，複素数平面上の3点O(0)，A(α)，B(α^2)を考える。次の条件(I)，(II)，(III)をすべて満たす複素数α全体の集合をSとする。

(I) αは実数でも純虚数でもない。

(II) $|\alpha| > 1$である。

(III) 三角形OABは直角三角形である。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) αがSに属するとき，$\angle \mathrm{OAB} = \dfrac{\pi}{2}$であることを示せ。

(2) 集合Sを複素数平面に図示せよ。

(3) x，yを$\alpha^2 = x + yi$を満たす実数とする。αがSを動くとき，xy平面上の点(x，y)の軌跡を求め，図示せよ。