$\boxed{1}$ 自然数 n に対して $I_n = \displaystyle\int \frac{1}{\cos^n x}\,dx$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 不定積分 I_2 を求めよ．

(2) 不定積分 I_4 を求めよ．

(3) 不定積分 I_3 を求めよ．

2　自然数 k, n が $k \leqq n$ を満たすとき，以下の問いに答えよ．

(1)　不等式

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leqq {}_n\mathrm{C}_k$$

を証明せよ．

(2)　すべての実数 t に対して，$1 + t \leqq e^t$ を証明せよ．

(3)　0 以上のすべての実数 t に対して，

$${}_n\mathrm{C}_k t^k \leqq e^{nt}$$

を証明せよ．

(4)　不等式

$${}_n\mathrm{C}_k \leqq \left(\frac{en}{k}\right)^k$$

を証明せよ．

(5)　$n = 10^{23}$，$k = 10^2$ のとき，${}_n\mathrm{C}_k$ の桁数の下 2 桁を切り捨てた値を求めよ．

3 $\triangle$ABC の各頂点 A，B，C の対辺の長さをそれぞれ a，b，c，重心を G，内心を I とする．以下の問いに答えよ．

(1)
$$\overrightarrow{\mathrm{IG}} = \left(\frac{1}{3} - \frac{b}{a+b+c}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \left(\frac{1}{3} - \frac{c}{a+b+c}\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
を証明せよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{IG}} = \overrightarrow{0}$ は，$\triangle$ABC が正三角形であるための必要十分条件であることを証明せよ．

(3) $\triangle$ABC が正三角形でないとき，次の条件 p，q は同値であることを証明せよ．

p： 順番を適当に入れ替えれば，a，b，c は等差数列をなす．

q： 線分 IG と平行な辺が存在する．

4 定数 a, b, c を用いて，数列 $\{S_n\}$ を

$$S_n = a^n + b^n + c^n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める.

(1) 恒等式

$$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$$

を用いて S_{n+3}, S_{n+2}, S_{n+1}, S_n が満たす漸化式を求めよ.

(2) $a+b+c=0$, $abc \neq 0$ のとき,

$$\frac{S_2S_3}{S_5}, \quad \frac{(S_2)^2S_3}{S_7}, \quad \frac{S_2S_5}{S_7}$$

のそれぞれの値を求めよ.

(3) (2)で求めた 3 つの値に共通してあてはまる規則を 1 つ挙げよ.