$\boxed{1}$ 次の各問の解答を解答用紙の所定欄に記入せよ。

(1) 座標平面上で，点 $\mathrm{O}(0,0)$，$\mathrm{A}(0,1)$，$\mathrm{B}(1,0)$，$\mathrm{C}(1,1)$ を考える。点 P が点 B から点 C まで動くとき，正方形 AOBC の辺および内部において，線分 OP の垂直 2 等分線が通る範囲の面積を求めよ。

(2) n を 2 以上の自然数とする。1 から n までの自然数の順列

$$a_1 a_2 \cdots a_n$$

のうち，$a_k < a_{k+1}$ を満たさないような k がただ 1 つだけある順列の総数を P_n とする。例えば $n=3$ の場合，条件を満たす順列全体は $\{132, 213, 231, 312\}$ であるので，$P_3 = 4$ である。P_{n+1} と P_n の関係式を求めよ。

(3) 整数係数の 3 次多項式 $f(x)$ が $f(0)=1$ かつ $f(\cos\frac{\pi}{7})=0$ を満たすとき，$f(x)$ を求めよ。

(4) 定数 c は $-1<c<1$ を満たすとする。すべての実数 x に対して，関係式

$$f(x)+f(cx)=x^2$$

を満たす連続関数 $f(x)$ を求めよ。

$\boxed{2}$ 3 つの複素数 α, β, z は次の関係式

$$\alpha+\beta=z,\ \ \alpha\beta=i\,\overline{z},\ \ \alpha\beta \fallingdotseq 0$$

を満たしているとする。ただし，i は虚数単位，$\overline{z}$ は z の共役な複素数とする。このとき $\dfrac{\alpha}{\beta}$ が実数であるような z の条件を求め，そのような z の集合を複素数平面上に図示せよ。

$\boxed{3}$ 四面体 OABC において，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{6}$，$\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{\pi}{4}$，$\angle\mathrm{COA}=\dfrac{\pi}{3}$ であるとする。次の問に答えよ。

(1) 頂点 C から三角形 OAB を含む平面に下ろした垂線を CD とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

(2) 四面体 OABC の体積を求めよ。

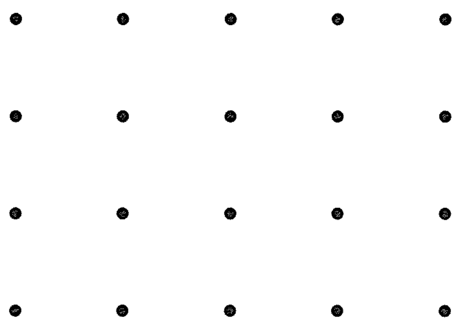
$\boxed{4}$ 平面全体に縦横同じ間隔で電球が置かれていて，次の規則で点滅を繰り返すとする。

初めはすべての電球が消えている。

ある1個の電球が1秒後に点灯し，2秒後にその周りに隣接する8個の電球が点灯する。3秒後には，さらにその外側に隣接する電球が点灯する。一般に $n+1$ 秒後には，n 秒目に初めて点灯した電球の外側に隣接する電球が点灯する。

一度点灯した電球は「2秒間点灯して次の1秒間消灯」を繰り返す。

下の図は電球の配置の一部分を示している。



$n \geqq 1$ とする。n 秒後に初めて点灯する電球の個数を a_n とし，n 秒後に点灯している電球の個数を b_n として，次の問に答えよ。

(1)　a_n を n を用いた式で表せ。

(2)　b_n を n を用いた式で表せ。

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n^2}$ を求めよ。

〔以　下　余　白〕