[I]　$\alpha=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}i$とおき，　複素数$1,\ \alpha,\ \overline{\alpha}$に対応する複素数平面上の点をそれぞれP, Q, Rとする。次の問に答えよ。

(1) 直線PQは複素数βを用いて方程式$\beta z+\overline{\beta}\,\overline{z}+1=0$で表される。この$\beta$を求めよ。

(2) 点zが直線PQ上を動くとき，点$w=\dfrac{1}{z}$が描く複素数平面上の図形を求めよ。

(3) 点zが三角形PQRの周および内部を動くとき，点$w=\dfrac{1}{z}$の動く範囲を複素数平面上に図示し，その面積を求めよ。

[II]　正の実数aに対して

$$f(x)=(2-ax)\,e^{-a(x-2)}$$

とする。次の問に答えよ。

(1) $f(x)$の増減を調べ，グラフの概形を描け。

(2) $f(x)$を最小にするxの値をpで表す。このとき

$$S=\int_0^p |f(x)|\,dx$$

をaを用いて表せ。

(3) (2)のSを最小にするaの値を求めよ。

[Ⅲ]　次の問に答えよ。

(1) 四面体 ABCD と四面体 ABCP の体積をそれぞれ V, V_{P} とする。

(i) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ が成り立つとき，体積比 $\dfrac{V_{\mathrm{P}}}{V}$ を求めよ。

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = b\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} + c\,\overrightarrow{\mathrm{AC}} + d\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ が成り立つとき，体積比 $\dfrac{V_{\mathrm{P}}}{V}$ を求めよ。

(2) 四面体 ABCD について，点 A, B, C, D の対面の面積をそれぞれ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ とする。原点を O として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \frac{\alpha\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \gamma\,\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \delta\,\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}$$

となる点 I を考える。四面体 ABCD の体積を V とするとき，3 点 A, B, C を通る平面と点 I の距離 r を求めよ。

(3) (2) の点 I は四面体 ABCD に内接する球の中心であることを示せ。

[Ⅳ]　n を正の整数とする。試行の結果に応じて k 点（$k = 0, 1, 2, \cdots, n$）が与えられるゲームがある。ここで k 点を獲得する確率は，ある $t > 0$ によって決まっており，これを $p_k(t)$ とする。このとき，確率 $p_k(t)$ は $a \geqq 0$ に対して以下の関係式を満足するという。

$$p_0(t) = t^n,\quad p_k(t) = a \cdot \frac{n-k+1}{k} \cdot p_{k-1}(t) \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

次の問に答えよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k(t)$ の値を求めよ。

(2) a を t を用いて表せ。

(3) 各 k に対して，$0 \leqq t \leqq 1$ の範囲で $p_k(t)$ を最大にするような t の値 T_k を求めよ。ただし，$p_k(0) = 0$ $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$，$p_n(0) = 1$ と定める。

(4) $0 < t < 1$ なる t を与えたとき，(3) で求めた T_k に対して，

$$E = \sum_{k=0}^{n} T_k \cdot p_k(t)$$

とする。E の値を求めよ。

[**V**]　3 次の整式 $f(x) = x^3 + x^2 + px + q$（ただし，$p \neq q, q \neq 0$），および $g(x) = \dfrac{-1}{x+1}$ が次の条件 $(*)$ をみたすとする。

$(*)$　$f(x) = 0$ の任意の解 α に対して $g(\alpha)$ も $f(x) = 0$ の解である。

次の問に答えよ。

(1) p, q の値を求めよ。

(2) $f(x) = 0$ は $-2 < x < 2$ の範囲に 3 つの実数解をもつことを示せ。

(3) $f(x) = 0$ の任意の解を $2\cos\theta$ とするとき，$2\cos 2\theta$, $2\cos 3\theta$ も解であることを示せ。

(4) $2\cos\theta$ $(0 < \theta < \pi)$ が $f(x) = 0$ の解であるとき，θ の値を求めよ。

[以　下　余　白]