[1] 実数 a に対して，座標平面上の直線 $y = ax$ を ℓ_a とする．

(1) 点 $\left(1, 3 + \sqrt{10}\right)$ を中心とする円 C が ℓ_a と y 軸の両方に接するとき，C の半径は $\boxed{(\ 1\ )}$ であり，a の値は $\boxed{(\ 2\ )}$ である．

(2) $a = 2$ とする．ℓ_a と y 軸の両方に接する半径 2 の円の中心を頂点とする四角形の面積は $\boxed{(\ 3\ )}\boxed{(\ 4\ )}\sqrt{\boxed{(\ 5\ )}}$ である．

(3) $a = \sqrt{3}$ とする．ℓ_a と y 軸の両方に接し，中心が第 1 象限にある 2 つの円 C_1, C_2 を考える．C_1 の半径を 1 とし，C_1, C_2 と ℓ_a との接点をそれぞれ $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ とする．線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の長さが 4 であるとき，C_2 の半径は $\boxed{(\ 6\ )} + \boxed{(\ 7\ )}\boxed{(\ 8\ )}\sqrt{\boxed{(\ 9\ )}}$ である．

[2] t の関数 $f(t)$ は定数関数でないとし，すべての実数 α, β に対して次を満たすとする．

$$f(\alpha) \geqq 1, \quad 2f(\alpha)f(\beta) = f(\alpha+\beta) + f(\alpha-\beta)$$

(1) $f(0) = \boxed{(10)}$ であり，$f(2\alpha) = \boxed{(11)}\left\{f(\alpha)\right\}^2 + \boxed{(12)}\boxed{(13)}$ が成り立つ．

(2) 方程式 $x + \dfrac{1}{x} = 2f(\alpha)$ を満たす x を考える．等式

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \boxed{(14)}\boxed{(15)}$$

を用いると，$x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \boxed{(16)}\, f\left(\boxed{(17)}\,\alpha\right)$ となることがわかる．

(3) さらに，等式

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) + \boxed{(18)}\boxed{(19)}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

を用いると，$x^3 + \dfrac{1}{x^3} = \boxed{(20)}\, f\left(\boxed{(21)}\,\alpha\right)$ となることがわかる．

(4) **(2)**, **(3)** より，一般に，自然数 n に対して

$$x^n + \frac{1}{x^n} = \boxed{(22)}\, f\left(\boxed{(23)}\, n\alpha\right) \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

が成り立つと推測される．この推測が正しいことを次のように確かめる．

$n = 1, 2, 3$ のとき①は成り立つ．3 以上の自然数 k に対して，$n = k-1$ および $n = k$ のとき①が成り立つと仮定すると，等式

$$x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) + \boxed{(24)}\boxed{(25)}\left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right)$$

より，$x^{k+1} + \dfrac{1}{x^{k+1}} = \boxed{(26)}\, f\left(\boxed{(27)}\left(k + \boxed{(28)}\right)\alpha\right)$ が成り立つことがわかる．

よって，$n = k+1$ のときにも①は成り立つ．

(5) $S_n = f(0) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} f(k\alpha)$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$ とする．$f(\alpha) > 1$ のとき，

$$S_n = \frac{1 + \boxed{(29)}\boxed{(30)}\, f(\alpha) + \boxed{(31)}\boxed{(32)}\, f\left((n-1)\alpha\right) + \boxed{(33)}\boxed{(34)}\, f(n\alpha)}{\boxed{(35)}\left\{1 - f(\alpha)\right\}}$$

となる．

[3] 下図のような 0 から 5 までの番号のついたマスを使い，A, B の 2 人が次のルールですごろくゲームを行う．

0	1	2	3	4	5

最初 0 番のマスに A と B の駒がある．A と B は交互にさいころを投げるものとし，A がさいころを投げてゲームを開始する．A と B のどちらが投げたときも次のようにゲームを進める．さいころの目が偶数のときは，A の駒を 1 つ先の番号のマスに動かし，B の駒は投げる前にあったマスから動かさない．目が奇数のときは，A の駒は投げる前にあったマスから動かさず，B の駒を 1 つ先の番号のマスに動かす．駒が先に 5 番のマスに達した人が上がりとなり，その時点でゲームは終了する．

以下では，さいころを投げた回数は A と B の投げた回数の合計とする．

(1) さいころをちょうど 9 回投げたときに A が上がる確率は $\dfrac{\boxed{(36)}\boxed{(37)}}{\boxed{(38)}\boxed{(39)}\boxed{(40)}}$ である．

(2) ゲームを開始してから終了するまで A と B の駒があるマスの番号の差が常に 1 以下である確率は $\dfrac{\boxed{(41)}}{\boxed{(42)}\boxed{(43)}}$ である．

(3) ゲームを開始してからさいころを 4 回投げたときまで常に B が先行する確率は $\dfrac{\boxed{(44)}}{\boxed{(45)}\boxed{(46)}}$ である．ただし，B の駒があるマスの番号が A の駒があるマスの番号より大きいとき，B が先行するという．

(4) A が先に上がったとき，ゲームを開始してからさいころを 4 回投げたときまで常に B が先行していた確率は $\dfrac{\boxed{(47)}\boxed{(48)}}{\boxed{(49)}\boxed{(50)}\boxed{(51)}}$ である．

[4] O を原点とする座標空間の 2 点 $\mathrm{A}\left(1,\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$, $\mathrm{B}\left(-1,\ 2,\ \dfrac{3}{2}\right)$ を通る直線を ℓ とする．また，xy 平面上に点 $\mathrm{C}(9, -3, 0)$ をとる．

(1) ℓ と yz 平面の交点の座標を求めよ．

(2) 点 C と ℓ 上の点 P を結ぶ線分 CP の長さが最小となるとき，P の座標を求めよ．

(3) 中心が直線 OC 上にある半径 1 の球面を S とする．S と ℓ が異なる 2 点 Q, R で交わるとき，線分 QR の長さが最大となる S の中心の座標と，線分 QR の長さの最大値を求めよ．

[5] a, x, y は実数の定数とし，$0 < a < 1,\ 0 \leqq y < 2\pi$ を満たすとする．複素数 z を

$$z = a^x \cos y + (a^x \sin y)\, i$$

によって定める．ただし，i は虚数単位である．

(1) $z\overline{z}$ と z^2 のそれぞれの実部と虚部を求めよ．ただし，$\overline{z}$ は z と共役な複素数を表す．

(2) $x = 0$ のとき，$z^2 + \overline{z} = 0$ を満たす y の値をすべて求めよ．

(3) $\overline{z}$ の実部が $\overline{z}$ の虚部より大きくなるような x と y の値の範囲を求めよ．

(4) 複素数 w を $w = \log_a(a^x \cos y) + \left\{\log_a(a^x \sin y)\right\} i$ によって定める．w の実部が w の虚部より大きくなるような x と y の値の範囲を求めよ．

[6] x の関数 $F(x)$ を

$$F(x) = |x+1| + \int_{-1}^{x} \bigl(1 - |t|\bigr)\, dt$$

によって定める．

(1) x の値について場合分けをして，それぞれの場合に $F(x)$ を x の整式で表せ．

(2) 曲線 $y = F(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

(3) 曲線 $y = F(x)$ 上の 2 点 $\mathrm{A}\bigl(a, F(a)\bigr)$, $\mathrm{B}\bigl(b, F(b)\bigr)$ を通る直線の傾きを m とする．ただし，$a < b$ とする．A, B を結ぶ線分の中点が $\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$ であるとき，b と m のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ．