物　理

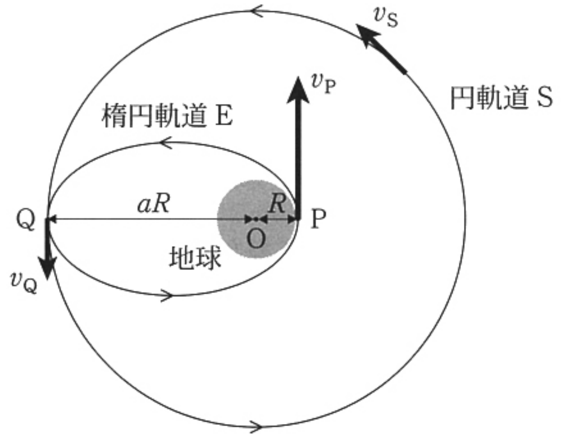
1. 以下の文章中の （ア） ～ （コ） に適切な式，または数値を記入しなさい。

質量 m の人工衛星が，質量 $\varDelta m$（ただし $\varDelta m < m$）の小物体をのせて，図のように，地球（質量 M）の中心Oを焦点の一つとする楕円軌道E上を周回している。楕円軌道E上で点Oに最も近い，地表近くの点を点P，点Oから最も離れた点を点Qとする。OP間の距離は地球の半径 R と同じと考えてよく，OQ間の距離は aR（ただし a は以下で求める定数）である。いま，点Qにおいて，人工衛星から小物体を瞬間的に放出したところ，人工衛星は点Oを中心とする円軌道S上を周回しはじめた。以下では，物体間にはたらく力として，人工衛星あるいは小物体をのせた人工衛星と地球の間の万有引力，および，人工衛星から小物体を放出する際に必要な瞬間的な力のみを考慮する。特にことわらない限り，速さは地球の中心から見た速さとする。万有引力定数を G，第1宇宙速度を $v_1 = \sqrt{\dfrac{GM}{R}}$ とし，地球の自転，公転，および他の天体の影響は考えない。円周率が必要な場合には π を用いよ。

1） まず，半径 aR の円軌道S上を周回しはじめた後の人工衛星（質量 m）の運動について考える。この円軌道S上で，人工衛星は地球との万有引力を向心力として等速円運動をするため，その速さ v_S は，a，v_1 を用いて，$v_S =$ （ア） と表される。ここで，人工衛星が円軌道Sを一周するのに要する時間を T とすると，定数 a は，R，T，v_1 を用いて $a^3 =$ （イ） の関係から求められる。

2） 次に，楕円軌道E上を周回している，小物体をのせた人工衛星（質量 $m + \varDelta m$）の運動について考える。この人工衛星の運動についても，惑星の運動に関するケプラーの法則が成り立つものとする。ケプラーの第2法則より，きわめて短い時間では，人工衛星の速さと，人工衛星と点O間の距離の積が一定となる。このことから，点Pでの人工衛星の速さ v_P は，a および点Qでの人工衛星の速さ v_Q を用いて $v_P =$ （ウ） と表される。この結果とエネルギー保存の法則より，v_P および v_Q は，それぞれ a，v_1 を用いて $v_P =$ （エ），$v_Q =$ （オ） と求められる。また，ケプラーの第3法則より，人工衛星が楕円軌道Eを一周するのに要する時間は，a を用いて，T の （カ） 倍と表される。

3） 点Qにおいて，人工衛星の進行方向と反対の方向に，v_Q に対する相対速さ v $(0 < v < v_Q)$ で小物体（質量 $\varDelta m$）を瞬間的に放出する場合の運動を考える。放出直後，地球の中心から見た速さにもとづく小物体の運動量の大きさが $\varDelta m$，v，v_Q を用いて （キ） と表されることから，円軌道S上での人工衛星の速さ v_S は，m，$\varDelta m$，v，v_Q を用いて $v_S =$ （ク） とも表すことができる。（ア） と （オ） の結果も含めて考えると，v は，a，m，$\varDelta m$，v_1 を用いて $v =$ （ケ） と表され，また，（ク） の結果を用いると，小物体の放出に必要なエネルギーは，m，$\varDelta m$ を用いて，$\dfrac{1}{2}\varDelta m v^2$ の （コ） 倍と表される。



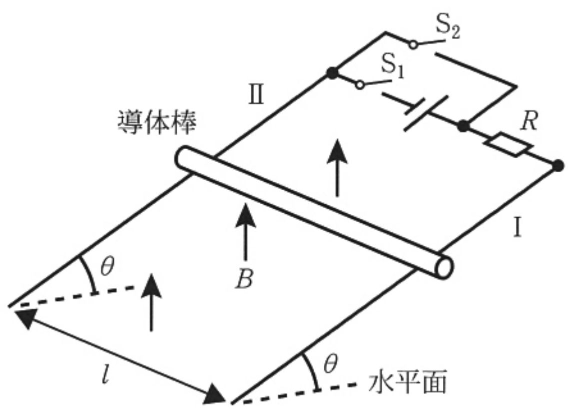
2. 以下の文章中の $\boxed{（ア）}$ ～ $\boxed{（コ）}$ に適切な式，または数値を記入しなさい。

図のように，十分に長い２本のまっすぐな導体レールⅠとⅡを間隔 l で平行に固定し，２本のレールがなす平面（レール面）と水平面がなす角を θ ($0° < \theta < 90°$) となるように真空中に置く。導体レール上端には，起電力が可変の直流電源，電気抵抗 R の抵抗器，およびスイッチ S_1，S_2 で構成される回路をつなぐ。導体レールの間には，鉛直上向きの一様な磁場（磁束密度 B）がかかっている。質量 m のまっすぐな導体棒を，２本の導体レールに対して直角にのせる。導体レールや導体棒は変形せず，導体棒は，導体レールと直角を保つように接触しながら，なめらかに動くものとする。また，抵抗器以外の回路の電気抵抗や，回路を流れる電流が作る磁場は無視する。重力は鉛直下向きに作用し，重力加速度の大きさを g とする。

1） 直流電源に起電力 V_0 が与えられ，スイッチ S_2 が開き S_1 が閉じた状態では，閉回路に電流が流れ，導体棒は静止していた。このとき，導体棒が磁場から受ける力のうち，導体レールに沿った成分の大きさは，V_0，R，B，l，θ を用いて $\boxed{（ア）}$ と表される。導体レールに沿った方向での力のつりあいを考えると，起電力 V_0 は，R，B，l，θ，m，g を用いて $V_0 = \boxed{（イ）}$ と表される。また，導体棒が２本の導体レールから受けるレール面に垂直な方向の力の大きさは，θ，m，g を用いて $\boxed{（ウ）}$ と表される。

2） 次に，スイッチ S_1 を開いた直後に S_2 を閉じると，導体棒は導体レールに沿って下降しはじめ，やがて一定の速さ v (> 0) となった。閉回路を貫く磁束の単位時間あたりの変化を考えると，誘導起電力によって閉回路に流れる電流の大きさは，R，B，l，θ，v を用いて $\boxed{（エ）}$ となる。この結果をふまえると，R，B，l，θ，m，g を用いて，v は $\boxed{（オ）}$ と表され，単位時間あたりに発生するジュール熱は $\boxed{（カ）}$ と表される。

3） その後，直流電源の起電力を V に変え，スイッチ S_2 を開いた直後に S_1 を閉じた。その結果，導体棒は導体レールに沿って上昇しはじめ，やがて一定の速さ u (> 0) となった。導体レールⅠからⅡに向かう方向を正にとると，導体棒を流れる電流は，V，R，B，l，u，θ を用いて $\boxed{（キ）}$ となる。この結果をふまえると，u は V，R，B，l，θ，m，g を用いて $\boxed{（ク）}$ と表される。このとき，単位時間あたりに電源がする仕事 P は，V，B，l，θ，m，g を用いて $\boxed{（ケ）}$ と表される。また，単位時間あたりに増加する導体棒の位置エネルギーは V，R，B，l，θ，m，g を用いて P の $\boxed{（コ）}$ 倍と表される。



3. 以下の文章中の $\boxed{(ア)}$ ～ $\boxed{(コ)}$ に適切な式，または数値を記入しなさい。

球形を保ちながら径が変化する断熱容器Aに，単原子分子 N 個からなる理想気体を封入する。分子1個の質量は m であり，N は十分に大きい数とする。容器A内には，電気抵抗 R の抵抗器，直流電源，導線とスイッチで構成された回路が容器Aと接しないように設置してあり，スイッチの開閉を遠隔操作して容器内部の気体を加熱できる。最初，図1のように，容器Aの半径は a であり，圧力と温度は容器内外で等しい。以下では，全ての分子は容器の内壁と弾性衝突しているとし，分子どうしの衝突，分子と回路の衝突，重力の影響は無視できるものとする。また，容器は十分に大きく，その中心Oは動かないものとし，容器Aの質量と壁の厚さ，回路の体積や熱容量，抵抗器以外の回路の電気抵抗，遠隔操作やスイッチの開閉にともなう発熱は十分小さいので考慮しない。円周率が必要な場合には π を用いよ。

1） 図1のように，1個の分子に着目し，その分子が容器Aの内壁に入射角 θ，速さ v で1回衝突するとき，内壁に与える力積の大きさは $\boxed{(ア)}$ である。この分子が再び内壁に衝突するまでに要する時間は $\boxed{(イ)}$ であるから，この分子が $\boxed{(イ)}$ に比べて十分長い時間 t の間に内壁に衝突する回数は $\boxed{(ウ)}$ となる。よって，N 個の分子が内壁に与える力の大きさの時間的平均は，全分子の速さの2乗平均を $\overline{v^2}$ とすれば，$\boxed{(エ)}$ となる。ここで，容器内外の圧力は $\boxed{(エ)}$ と容器内側の表面積の比として，また，容器内外の温度は気体の状態方程式から求められ，それぞれ，P_0 と T_0 として以下で用いる。

2） 図1の状態から，時間 t_1 の間，抵抗器に一定の電流 I を流し，圧力 P_0 を保って気体をゆっくり加熱したところ，図2のように，容器Aの半径は b $(a < b < 2a)$ になった。加熱前からの気体の内部エネルギーの変化は，R，I，t_1，a，b，P_0 を用いて $\boxed{(オ)}$ と表される。理想気体の運動エネルギーが絶対温度だけで決まることを考慮すれば，加熱後の分子の速さの2乗平均は，a と b を用いて，加熱前の分子の速さの2乗平均 $\overline{v^2}$ の $\boxed{(カ)}$ 倍と表される。

3） 図3のように，図2の状態になった容器Aを回路とともに，内半径 $2a$ で変形しない球形の断熱容器B内に，2つの容器の中心が一致するように設置した。$\boxed{(キ)}$ ～ $\boxed{(コ)}$ の設問では，a と b を用いて解答せよ。容器Aと容器Bの間を真空にすると，容器Aは断熱的に膨張して容器Bの内壁に張り付き，容器A内の圧力と温度は，それぞれ，P_1 と T_1 に変化した。単原子分子理想気体の断熱過程では，$PV^{\frac{5}{3}} =$ 一定 の関係が知られているので，P_1 は P_0 の $\boxed{(キ)}$ 倍，T_1 は T_0 の $\boxed{(ク)}$ 倍と表される。このとき，N 個の分子が容器Aの内壁に与える力の大きさの時間的平均は，$\boxed{(エ)}$ の $\boxed{(ケ)}$ 倍と表される。この後，回路に電流を流して抵抗器を発熱させたところ，定積変化によって，容器A内の気体の圧力は P_0 にもどった。速さの2乗平均 $\overline{v^2}$ をもつ分子 N 個の全運動エネルギーを K とし，$\boxed{(エ)}$ と $\boxed{(ク)}$ の結果を考慮すれば，抵抗器で発生したジュール熱は，K の $\boxed{(コ)}$ 倍と表される。

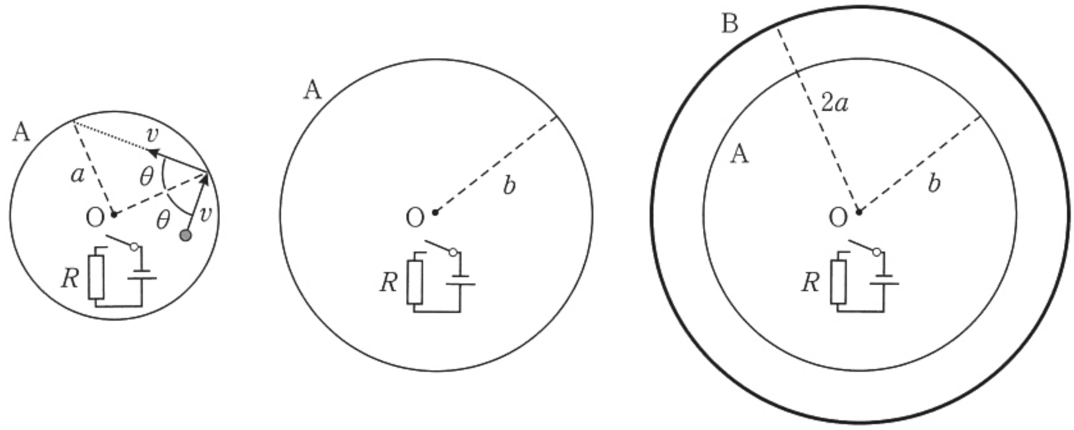


図1　　図2　　図3