1 自然数nに対して，nのすべての正の約数(1とnを含む)の和を$S(n)$とおく。例えば，$S(9)=1+3+9=13$である。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) nが異なる素数pとqによって$n=p^2q$と表されるとき，$S(n)=2n$を満たすnをすべて求めよ。

(2) aを自然数とする。$n=2^a-1$が$S(n)=n+1$を満たすとき，aは素数であることを示せ。

(3) aを2以上の自然数とする。$n=2^{a-1}(2^a-1)$が$S(n)\leqq 2n$を満たすとき，nの1の位は6か8であることを示せ。

$\boxed{2}$ xyz 空間において連立不等式

$$|x| \leqq 1, \quad |y| \leqq 1, \quad |z| \leqq 1$$

の表す領域を Q とし，正の実数 r に対して $x^2 + y^2 + z^2 \leqq r^2$ の表す領域を S とする。また，Q と S のいずれか一方のみに含まれる点全体がなす領域を R とし，R の体積を $V(r)$ とする。さらに

$x \geqq 1$ の表す領域と S の共通部分を S_x

$y \geqq 1$ の表す領域と S の共通部分を S_y

$z \geqq 1$ の表す領域と S の共通部分を S_z

とし，

$S_x \neq \varnothing$を満たす r の最小値を r_1

$S_x \cap S_y \neq \varnothing$を満たす r の最小値を r_2

$S_x \cap S_y \cap S_z \neq \varnothing$を満たす r の最小値を r_3

とする。ただし，$\varnothing$は空集合を表す。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $r = \dfrac{\sqrt{10}}{3}$ のとき，R の xy 平面による断面を図示せよ。

(2) r_1，r_2，r_3 および $V(r_1)$，$V(r_3)$ を求めよ。

(3) $r \geqq r_1$ のとき，S_x の体積を r を用いて表せ。

(4) $0 < r \leqq r_2$ において，$V(r)$ が最小となる r の値を求めよ。

$\boxed{3}$ 関数$f(x)=《x》-2《x-1》+《x-2》$を考える。ここで，実数uに対して$《u》=\dfrac{u+|u|}{2}$とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $f(x)$のグラフをかけ。

(2) $g(x)=\displaystyle\int_0^1 f(x-t)\,dt$とおくとき，$g(x)$の最大値を求めよ。

(3) (2)の$g(x)$に対して，$p(s)=\displaystyle\int_0^3 (x-s)^2 g(x)\,dx$とおくとき，$p(s)$の最小値を求めよ。