$\boxed{1}$ 1 以上 6 以下の 2 つの整数 a，b に対し，関数 $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ を次の条件 (ア)，(イ)，(ウ) で定める．

(ア) $f_1(x) = \sin(\pi x)$

(イ) $f_{2n}(x) = f_{2n-1}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} - x\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$

(ウ) $f_{2n+1}(x) = f_{2n}(-x) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$

以下の問いに答えよ．

(1) $a = 2$，$b = 3$ のとき，$f_5(0)$ を求めよ．

(2) $a = 1$，$b = 6$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{100}(-1)^k f_{2k}(0)$ を求めよ．

(3) 1 個のさいころを 2 回投げて，1 回目に出る目を a，2 回目に出る目を b とするとき，$f_6(0) = 0$ となる確率を求めよ．

（配点率 20 %）

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ．

(1) c を正の定数とする．正の実数 x，y が $x+y=c$ をみたすとき，

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)$$

の最小値を c を用いて表せ．

(2) 正の実数 x，y，z が $x+y+z=1$ をみたすとき，

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1-\frac{4}{3z}\right)$$

の最大値を求めよ．

（配点率 20 %）

3　座標平面において，原点 O を中心とする半径 r の円と放物線 $y=\sqrt{2}(x-1)^2$ は，ただ 1 つの共有点 (a, b) をもつとする．

(1) a，b，r の値をそれぞれ求めよ．

(2) 連立不等式

$$a \leqq x \leqq 1, \quad 0 \leqq y \leqq \sqrt{2}(x-1)^2, \quad x^2+y^2 \geqq r^2$$

の表す領域を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

（配点率 20 %）

4　正の整数 n に対して

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

とおき，1 以上 n 以下のすべての奇数の積を A_n とする．

(1) $\log_2 n$ 以下の最大の整数を N とするとき，$2^N A_n S_n$ は奇数の整数であることを示せ．

(2) $S_n=2+\dfrac{m}{20}$ となる正の整数の組 (n, m) をすべて求めよ．

(3) 整数 a と $0 \leqq b < 1$ をみたす実数 b を用いて，

$$A_{20}S_{20}=a+b$$

と表すとき，b の値を求めよ．

（配点率 20 %）

$\boxed{5}$ 円上の 5 点 A，B，C，D，E は反時計回りにこの順に並び，円周を 5 等分している．5 点 A，B，C，D，E を頂点とする正五角形を R_1 とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \vec{c}$ とおき，$\vec{a}$ の大きさを x とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の大きさを y とするとき，$x^2 = y(y-x)$ がなりたつことを示せ．

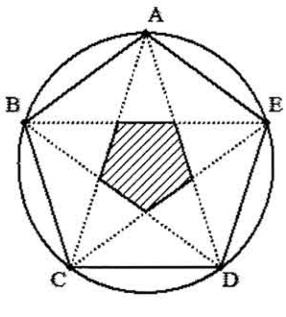
(2) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を $\vec{a}, \vec{c}$ を用いて表せ．

(3) R_1 の対角線の交点として得られる R_1 の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_2 とする．R_2 の一辺の長さを x を用いて表せ．

(4) $n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ に対して，R_n の対角線の交点として得られる R_n の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_{n+1} とし，R_n の面積を S_n とする．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{S_1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} S_k$$

を求めよ．



斜線部分が R_2

（配点率 20 %）