

1 実数  $a, b$  は  $a \geq 1, b \geq 1, a + b = 9$  を満たす。

(1)  $\log_3 a + \log_3 b$  の最大値と最小値を求めよ。

(2)  $\log_2 a + \log_4 b$  の最大値と最小値を求めよ。

2 連立方程式

$$\begin{cases} x^2 = yz + 7 \\ y^2 = zx + 7 \\ z^2 = xy + 7 \end{cases}$$

を満たす整数の組  $(x, y, z)$  で  $x \leq y \leq z$  となるものを求めよ。

3  $P(0) = 1, P(x+1) - P(x) = 2x$  を満たす整式  $P(x)$  を求めよ。

4

正の実数  $a, b, c$  は  $a + b + c = 1$  を満たす。連立不等式

$$|ax + by| \leq 1, \quad |cx - by| \leq 1$$

の表す  $xy$  平面の領域を  $D$  とする。 $D$  の面積の最小値を求めよ。

5

$xy$  平面上の直線  $x = y + 1$  を  $k$ ,  $yz$  平面上の直線  $y = z + 1$  を  $l$ ,  $xz$  平面上の直線  $z = x + 1$  を  $m$  とする。直線  $k$  上に点  $P_1(1, 0, 0)$  をとる。 $l$  上の点  $P_2$  を  $P_1P_2 \perp l$  となるように定め、 $m$  上の点  $P_3$  を  $P_2P_3 \perp m$  となるように定め、 $k$  上の点  $P_4$  を  $P_3P_4 \perp k$  となるように定める。以下、同様の手順で  $l, m, k, l, m, k, \dots$  上の点  $P_5, P_6, P_7, P_8, P_9, P_{10}, \dots$  を定める。

- (1) 点  $P_2, P_3$  の座標を求めよ。
- (2) 線分  $P_nP_{n+1}$  の長さを  $n$  を用いて表せ。